

ЛХII олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, ШКОЛЬНЫЙ ТУР

Таллинн, 15 января 2015 года

IX класс

Время, отводимое для решения: 3 часа.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. В тренажерном зале есть 12 различных гирь весом 4 кг, 8 кг, 12 кг, 16 кг, 20 кг, 24 кг, 28 кг, 32 кг, 36 кг, 40 кг, 44 кг и 50 кг.

а) Можно ли все гири разделить на две группы так, чтобы общий вес всех гирь первой группы был равен общему весу всех гирь второй группы? Если да, то покажи, как необходимо делить эти гири на группы. Если нет, то объясни почему.

б) Все гири разделили на две группы так, что общий вес гирь первой группы был на 10 кг больше общего веса гирь второй группы. Какой группе может принадлежать самая тяжелая гиря: только первой, только второй или она может быть в первой или второй группе гирь? Обоснуй свой ответ.

2. Пусть a , b и c такие числа, при которых выполняются равенства $\frac{a+b}{c} = 2$ и $\frac{b+c}{a} = 3$.

Найди точное значение числа $\frac{b}{c-a}$.

3. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 13 см^2 . Пусть точки K , L и M соответственно середины отрезков AB , BC и CD , а точка N - середина отрезка KL . Найди площадь треугольника AMN .

4. У лаборанта было 10 пустых пробирок и колба с раствором соли. Сначала он перелил $\frac{1}{12}$ часть имеющегося в колбе раствора в первую пробирку, затем добавил в колбу столько же воды. Затем он перелил $\frac{1}{11}$ часть имеющегося в колбе раствора во вторую пробирку и добавил в колбу столько же воды. В следующую пробирку он перелил $\frac{1}{10}$ часть имеющегося в колбе раствора и опять добавил в колбу столько же воды и т.д. В девятую пробирку он перелил $\frac{1}{4}$ часть имеющегося в колбе раствора и добавил в колбу столько же воды. В последнюю пробирку он перелил $\frac{1}{3}$ часть имеющегося в колбе раствора, содержание соли в котором оказалось точно 3%. Найди процент содержания соли в растворе в первой пробирке.

5. В каждый кружок нужно записать одно натуральное число так, чтобы числа, записанные в любые два кружка, соединенные отрезком, отличались бы друг от друга на 1 или 2, а числа, записанные в любые два кружка, не соединенных отрезком, не отличались бы друг от друга на 1 или 2.

а) Докажи, что сумма всех чисел, записанных по данному правилу всегда кратна 5.

б) Найди одну возможность записи чисел в кружки, при которой сумма всех чисел равняется 100.

